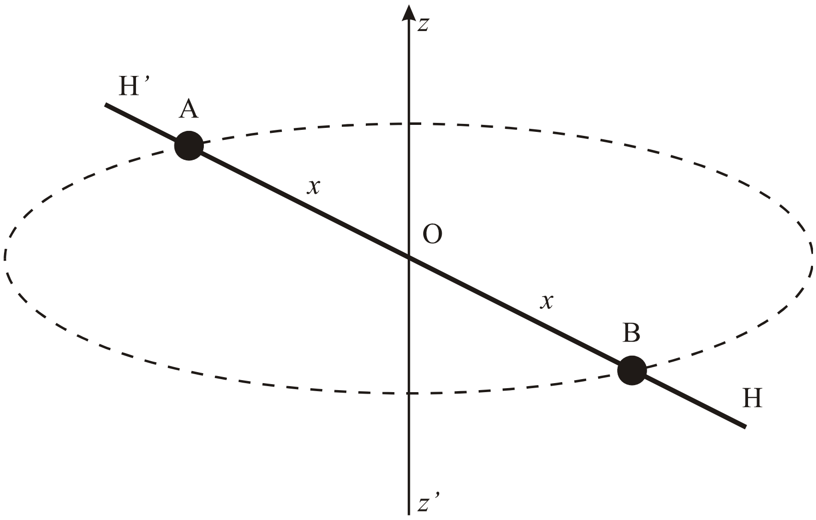
Exercices concernant les particules en interaction

1. TRAVAIL ET ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN SYSTÈME EN ROTATION.

Deux sphères de même masse *m*, assimilables à deux points matériels, peuvent glisser le long d'une tige horizontale de masse négligeable H'H soudée en O à un axe vertical *z'z*. Les centres A et B des sphères sont constamment maintenus à égale distance de l'axe ($\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = x$).



L'ensemble du système tourne autour de *z'z* avec une vitesse angulaire ω. La distance *x* peut être modifiée au cours de la rotation par un observateur faisant partie du système en rotation.

1º Les sphères étant à la distance $x = x_1$ de l'axe, le système est mis en rotation uniforme avec la vitesse ω_1. Calculer le moment cinétique L_1 des deux sphères par rapport à *z'z*, ainsi que l'énergie cinétique K_1 du système.

2º Pendant la rotation, l'observateur diminue la distance des sphères à l'axe; elle devient $x = x_2 < x_1$. En l'absence d'intervention de forces extérieures, quelles sont, en fonction de x_2, x_1, ω_1 et K_1 les nouvelles valeurs de la vitesse angulaire ω_2 et de l'énergie cinétique K_2 ?

En déduire la variation des forces (axipètes) exercées par l'observateur pour amener les masses en rotation de la distance x_1 à la distance x_2. (On calculera le travail dans un déplacement élémentaire de *x* à $x + dx$ pour lequel la vitesse de rotation est $\omega(x)$ et l'on intégrera de x_1 à x_2.)

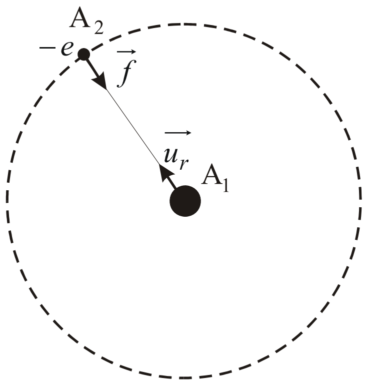
Comparer la valeur trouvée à la variation d'énergie cinétique du système.

2. L'ATOME DE BOHR. CORRECTION D'ENTRAÎNEMENT DU NOYAU.

Le but de ce problème est d'étudier l'influence de l'entraînement du noyau sur les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène,

1°*Approximation du noyau fixe.* — On suppose que le noyau A_1 de l'atome d'hydrogène, de charge + *e*, reste fixe et attire l'électron A_2, de charge − *e* et de masse *m*, avec la force électrostatique :

$$\vec{f} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$



L'électron décrit alors, avec la vitesse angulaire ω, une orbite circulaire de rayon r autour du noyau.

a) Calculer ω^2 et en déduire, en fonction de e, ε_0 et r l'expression de l'énergie cinétique K de l'électron.

b) Quelle est l'énergie potentielle d'interaction U entre le noyau et l'électron (on la supposera nulle à l'infini) ? En déduire l'énergie mécanique totale E du système.

c) Quantification du moment cinétique et de l'énergie. — D'après la théorie de Bohr, seules sont possibles 1es orbites circulaires pour lesquelles le moment cinétique du système par rapport au noyau est un multiple entier de $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h étant la constante de Planck : c'est la condition de quantification du moment cinétique :

$$L = n\hbar \quad n(1,2,3,...).$$

En déduire que le rayon de ces orbites est donné par $r = r_0 n^2$ et l'énergie correspondante par $E = \frac{E_0}{n^2}$.

Déterminer r_0 et E_0 correspondant au niveau fondamental de l'atome $n = 1$.

2° *Entraînement du noyau*. — L'atome est assimilé à un système isolé. La masse du noyau est $M = 1836 \times m$.

a) Quel est le mouvement du centre de masse C du système ? On lie à C des axes de directions fixes constituant le repère $\mathcal{C}$. Que peut-on dire de ce référentiel ?

b) Quelle relation lie dans $\mathcal{C}$ les rayons vecteurs : $\overrightarrow{CA_1} = \vec{r_1}$ $\overrightarrow{CA_2} = \vec{r_2}$.

Exprimer r_1 et r_2 en fonction de la distance r de l'électron au noyau.

c) L'électron décrit une orbite circulaire de rayon r, autour de C. Quelle est alors la trajectoire du noyau ? Quelle est la trajectoire de l'électron par rapport au noyau ?

d) Écrire l'expression de la force électrostatique qui s'exerce sur l'électron. Soit ω sa vitesse angulaire dans le repère $\mathcal{C}$. Calculer ω et montrer que l'on obtient une expression analogue à celle trouvée à la première question, à condition de remplacer m par la masse réduite μ, que l'on calculera.

e) Calculer, en fonction de ω, μ et r, l'énergie cinétique totale du système. Comparer à l'expression trouvée dans la première question.

Quelle est l'énergie potentielle U? En déduire la valeur de l'énergie mécanique totale E.

3° *Quantification du moment cinétique et de l'énergie.*

a) Calculer le moment cinétique L de l'atome (électron + noyau) par rapport à C. Montrer que l'on obtient la même expression que dans l'approximation du noyau fixe, m étant remplacé par μ.

b) Écrire que L est égal à $L = n\hbar \quad n(1,2,3,...)$. En déduire que les valeurs de r correspondant aux orbites possibles sont $r = r_0 n^2$ et calculer r_0.

En déduire que l'on a encore $E = \frac{E_0}{n^2}$ et calculer E_0.

4° *Spectres de l'hydrogène et du deutérium.* — La raie H_α de l'hydrogène est émise lorsque l'électron retombe du niveau d'énergie E_3 {correspondant à $n = 3$) au niveau E_2 (correspondant à $n = 2$). La fréquence ν et la longueur d'ondé λ de cette raie sont données par :

$$|E_2 - E_1| = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

a) Exprimer la variation relative de la masse réduite μ lorsque l'on remplace le noyau d'hydrogène (masse M) par un noyau de deutérium (masse 2 M). On tiendra compte de ce que $\frac{m}{M}$ est petit.

b) En déduire la variation correspondante $\frac{\delta E_0}{E_0}$.

c) Quelle est la différence de longueur d'onde entre les raies H_α de l'hydrogène et du deutérium, sachant que pour l'hydrogène cette longueur d'onde est $\lambda_H = 6563 \times 10^{-10}$ m .

3. DAVID ET GOLIATH. Choc direct.

Une grosse boule (Goliath), de masse 3*m* et une boule plus petite (David), de masse *m*, se déplacent l'une vers l'autre sur une même droite, et entrent en collision. Avant le choc, la vitesse de Goliath est *v*. Quelle doit être la vitesse de David pour qu'il arrête Goliath, c'est-à-dire pour qu'après le choc la grosse boule soit immobile? Quelle est, après le choc, la vitesse de David ?

4.CHAMP DE GRAVITATION CRÉE PAR LA TERRE ET LA LUNE.

La masse de la Terre est $M_1 = 6 \times 10^{24}$ kg, celle de la Lune est $M_2 = 7{,}3 \times 10^{22}$ kg, le rayon de la Terre est $R_1 = 6{,}4 \times 10^6$ m et celui de la Lune $R_2 = 1{,}7 \times 10^6$ m. La distance entre leurs centres O_1 et O_2 est $d = 3{,}8 \times 10^8$ m .

1º Quelle est, en un point quelconque de l'espace, l'expression générale du potentiel *V* correspondant au champ de gravitation résultant de ces deux astres ? Donner sa valeur sur la ligne des centres O_1O_2 en fonction de la distance *r* au centre de 1a Terre et représenter sa variation en précisant les valeurs remarquables.

En déduire la différence de potentiel $V_L - V_T$ entre la Lune et la Terre.

2º Le graphe de *V* présente un extremum entre O_1 et O_2. Que se passe-t-il en ce point ?

3º L'énergie minimale que doit posséder un missile terrestre pour pouvoir atteindre la Lune est-elle égale à $m(V_L - V_T)$? On donne $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

5. Freinage d'un satellite artificiel

1) Un satellite artificiel terrestre de masse *m* décrit relativement au référentiel géocentrique une trajectoire circulaire de rayon $R_0 + h$ (R_0 : rayon terrestre ; h : altitude du satellite). On réduit l'attraction terrestre à celle d'un corps à symétrie sphérique. Calculer l'énergie mécanique *E* du satellite et la comparer à son énergie cinétique $\frac{1}{2} m v^2$.

2) Du fait des frottements sur les couches très raréfiées de l'atmosphère à l'altitude *h*, le satellite subit des forces de frottement de somme opposée à sa vitesse *v* et de module kmv^2. Il s'ensuit que l'altitude *h* varie de Δh pour une révolution. Supposant $\Delta h << h$ exprimer la constante *k* en fonction de *h*, Δh et R_0. Calculer la variation de vitesse Δv du satellite en fonction de Δh et de la période de révolution *T* du satellite.

Application numérique : $R_0 = 6400$ km, $h = 300$ km, $\Delta h = -200$ m, $g_0 = 9{,}81\, m \cdot s^{-2}$.